Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ВЕРХНЕВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРОБИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «Верхневолжский ГАУ»)

ИНЖЕНЕРНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДЕНА
протоколом заседания
методической комиссии факультета
№ 04 от «14» мая 2026 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ»

Шифр и наименование научной специальности	**5.2.2. Математические, статистические и инструментальные методы в экономике**
Уровень образовательной программы	**Подготовка научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре**
Форма обучения	**очная**
Трудоемкость дисциплины, З.Е.	**6**
Трудоемкость дисциплины, час.	**216**

Разработчик:
Заведующий кафедрой экономики, менеджмента и цифровых технологий, д.э.н., профессор О.В. Гонова
_____
(подпись)

СОГЛАСОВАНО:
Декан инженерно-экономического факультета, доцент _____ Н.В. Муханов
(подпись)

Иваново, 2026

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Целью освоения дисциплины является дать аспирантам знания: об основных понятиях и математических методах, разработанных для решения экономико-математических задач, о теории и методологии математического моделирования в экономике; а также выработать умения в формализации выявленных взаимосвязей между экономическими явлениями с помощью математических символов, умения подбирать в соответствии с типом задачи соответствующие методы ее решения, привить первоначальные навыки в использовании пакетов прикладных программ для решения экономических и статистических задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

В соответствии с учебным планом дисциплина относится к	Образовательному компоненту
Статус дисциплины	Элективная
Обеспечивающие (предшествующие) дисциплины	Информационные технологии в науке и образовании Теория систем и системный экономический анализ
Обеспечиваемые (последующие) дисциплины	Педагогическая практика Научные исследования Итоговая аттестация

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ) (ХАРАКТЕРИСТИКА ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ)

Шифр и наименование компетенции	Индикатор(ы) достижения компетенции / планируемые результаты обучения	Номер(а) раздела(ов) дисциплины (модуля), отвечающего(их) за формирование данного(ых) индикатора(ов) достижения компетенции
СК-1 Способность и готовность участвовать в научных дискуссиях, выступать с докладами, проводить научные исследования и эксперименты с использованием математических, статистических и инструментальных методов в экономике	**ИД-1 СК-1** Знает принципы подготовки и выступления с докладом по проблеме исследования; математические, статистические и инструментальные методы в экономике; принципы научного эксперимента. **ИД-2 СК-1** Умеет при планировании научных исследований и интерпретации их результатов получать специальную информацию с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий. **ИД-3 СК-1** Владеет навыками подготовки выступления с докладом и мультимедийным сопровождением. Использует математические, статистические и инструментальные методы в экономике в процессе научных исследований. Составляет развернутую схему проведения научного эксперимента.	1-3
СК-2 Способность разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем на	**ИД-1 СК-2** Содержание и основные направления, методы и средства разработки, теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем, объясняет систему экономико-математических методов и инструментальных средств, необходимые для разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем. **ИД-2 СК-2** Оценивать и подбирать оптимальные экономико-	1-3

основании экономико-математических методов и инструментальных средств	математические методы и эффективные инструментальные средства, применяемых для разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем. **ИД-3 СК-2** Опытом разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем, навыками выбора экономико-математических методов и инструментальных средств.	
СК-3 Способность развития математического аппарата экономических исследований, методов их применения и встраивания в инструментальные средства для повышения обоснованности управленческих решений на всех уровнях экономики	**ИД-1 СК-3** Знает содержание и основные направления, методы и средства развития математического аппарата, систему методов применения и встраивания математического аппарата в инструментальные средства. **ИД-2 СК-3** Анализирует содержание и основные направления, методы и средства развития математического аппарата, объясняет выбор методов применения и встраивания математического аппарата в инструментальные средства. **ИД-3 СК-3** Владеет опытом развития математического аппарата экономических исследований, эффективными методами применения и встраивания математического аппарата в инструментальные средства.	1-3

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

4.1. Содержание дисциплины (модуля)

№ п/п	Темы занятий	Виды учебных занятий и трудоемкость, час.				Контроль знаний*	Применяемые активные и интерактивные технологии обучения
		лекции	практические (семинарские)	лабораторные	самостоятельная работа		
1.	Математические методы экономики						
1.1.	Понятие задачи математического программирования. Допустимые и оптимальные решения задачи математического программирования Классификация задач математического программирования	2	4	0	10	КЛ, УО, З	
1.2.	Линейное программирование. Понятие задачи линейного программирования. Виды задач, формы записи. Примеры задач линейного программирования. Специальные задачи линейного программирования.	4	12	0	12	КЛ, УО, ВПР, З	Лекция-презентация
1.3	Методы решения задач линейного программирования Метод Жордана-Гаусса Алгоритм симплекс-метода Геометрическая интерпретация. Задачи линейного программирования. Методы нахождения начального допустимого базисного решения транспортной задачи.	4	8	0	16	КЛ, УО, ВПР, З	Лекция-дискуссия
1.4	Нелинейное программирование. Геометрическая интерпретация задач нелинейного программирования. Методы решения задач с ограничениями – равенствами. Методы решения задачи выпуклого программирования.	4	4	0	12	КЛ, УО, ВПР, З	
1.5	Динамическое программирование Постановка задачи, ее экономическая и геометрическая интерпретация. Принцип оптимальности Беллмана. Задача оптимального распределения инвестиций.	2	4	0	10	КЛ, УО, З	Лекция-дискуссия

	Итого	16	32	0	60		
2.	Экономико-статистические методы.						
2.1	Множественная регрессия: понятие и предпосылки. Этапы построения регрессии: спецификация, параметризация, верификация.	2	6	0	2	КЛ, Э	
2.2	Корреляционный анализ, частные коэффициенты корреляции	2	6	0	2	КЛ, Э	
2.3	Показатели качества регрессии. Специальные случаи регрессий.	2	4	0	2	КЛ, Э	
3.	Инструментальные методы экономики						
3.1.	Обмен данных в компьютерных системах. Понятие протокола обмена данных. Системное и прикладное программное обеспечение. Программные средства и программные продукты.	4	6	0	4	КЛ, УО, Э	Лекция-презентация
3.2.	Программная поддержка средств организационного управления. Интегрированные офисные пакеты программ и их комплектация.	2	6	0	2	КЛ, УО, Э	
3.3	Базы данных и системы управления базами данных. Информационные объекты. Модели аналитической обработки данных в СУБД.	4	4	0	4	КЛ, УО, Э	
3.4	Информационные системы (ИС). Понятие ИС. Их структура и состав.	2	4	0	2	КЛ, УО, ВПР, Э	
	Итого	18	36		18		
	Всего	34	68		78		

* Указывается форма контроля. Например: УО – устный опрос, КЛ – конспект лекции, КР – контрольная работа, ВЛР – выполнение лабораторной работы, ВПР – выполнение практической работы, К – коллоквиум, Т – тестирование, Р – реферат, Д – доклад, ЗКР – защита курсовой работы, ЗКП – защита курсового проекта, Э – экзамен, З – зачет.

4.2. Распределение часов дисциплины (модуля) по семестрам

Вид занятий	1 курс		2 курс		3 курс		Итого
	1 семестр	2 семестр	3 семестр	4 семестр	5 семестр	6 семестр	
Лекции				16	18		34
Лабораторные				-	-		-
Практические				32	36		68
Итого контактной работы				48	54		102
Самостоятельная работа				60	18		78
Форма контроля*				За	Э (36)		За, Э

** Э – экзамен, З – зачет, ЗаО – зачет с оценкой, КП – курсовой проект, КР – курсовая работа, К – контрольная работа.*

5. ОРГАНИЗАЦИЯ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

5.1. Содержание самостоятельной работы по дисциплине (модулю)

Темы индивидуальных заданий:

- Решение задач линейного программирования методом Жордана- Гаусса.
- Решение задач линейного программирования симплекс методом.
- Построение двойственных задач.
- Решение транспортной задачи методом потенциалов.
- Методы и модели теории игр.
- Нелинейное программирование.
- Задача об оптимальном распределении инвестиций.
- Задача выбора оптимальной стратегии обновления оборудования.
- Параметры сетевой модели и методы их расчета.
- Защита информации в экономических информационных системах.

Темы, выносимые на самостоятельную проработку:

- История возникновения и развития экономико-математических и инструментальных методов.
- Место и роль экономико-математических и инструментальных методов в экономической науке. Математические модели и методы, применяемые в экономических расчетах.
- Информационные системы в кредитных организациях.
- Рынок и производители программного обеспечения.

5.2. Контроль самостоятельной работы

Оценка результатов самостоятельной работы организуется следующим образом:

- устные опросы;
- тестирование;
- выполнение заданий из базы кейс-задач.

5.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

1. Гонова О.В., Забелина Н.В. Экономико-математические методы: методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы аспирантов / О.В. Гонова, Н.В. Забелина – Иваново: ФГБОУ ВО Ивановская ГСХА, 2017 – 43с.
2. Малыгин, А. А. Моделирование социально-экономических процессов в АПК : учебно-методическое пособие / А. А. Малыгин. — Иваново : Верхневолжский ГАУ, 2022. — 98 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/449840
3. Малыгин, А. А. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве : учебно-методическое пособие / А. А. Малыгин. — Иваново : Верхневолжский ГАУ, 2022. — 95 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/263741

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Основная учебная литература, необходимая для освоения дисциплины (модуля)

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие для вузов / И. Л. Акулич. — 6-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 348 с. — ISBN 978-5-507-50460-2. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/437246
2. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие / И. Л. Акулич. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 352 с. — ISBN 978-5-8114-0916-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210680
3. Буснюк, Н. Н. Математическое моделирование : учебное пособие для вузов / Н. Н. Буснюк, А. А. Черняк. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 196 с. — ISBN 978-5-507-51537-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/450857
4. Ганичева, А. В. Прикладная статистика : учебное пособие / А. В. Ганичева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 172 с. — ISBN 978-5-507-47980-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/336800
5. Голубева, Н. В. Математическое моделирование систем и процессов : учебное пособие для вузов / Н. В. Голубева. — 4-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 244 с. — ISBN 978-5-507-48455-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/393023
6. Катаргин, Н. В. Экономико-математическое моделирование : учебное пособие для вузов / Н. В. Катаргин. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 256 с. — ISBN 978-5-507-44332-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/223430
7. Статистика : учебное пособие / Л. А. Волощук, О. Ю. Монина, Т. В. Пахомова [и др.]. — Саратов : Вавиловский университет, 2016. — 353 с. — ISBN 978-5-9908525-2-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/137497

6.2. Дополнительная учебная литература, необходимая для освоения дисциплины (модуля)

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб.пособие для экономич. специальностей вузов. - М : Высшая школа, 1986. - 319с.
2. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов. - М. : Финансы и статистика, 2001. - 368с.
3. Васильев, А. Н. Числовые расчеты в Excel : справочник / А. Н. Васильев. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-1580-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/212198
4. Ильченко, А.Н. Практикум по экономико-математическим методам [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов. - М. : Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2009. - 288с.
5. Касимова, Т. М. Экономико-математическое моделирование и прогнозирование развития регионального агропромышленного комплекса : монография / Т. М. Касимова. — Махачкала : ДГУ, 2017. — 136 с. — ISBN 978-5-9913-0146-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/158319
6. Лукьяненко, И. С. Статистика : учебное пособие для вузов / И. С. Лукьяненко, Т. К. Ивашковская. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 200 с. — ISBN

978-5-8114-9488-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/195509
7. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / под ред. А.М.Гатаулина. - М. : Агропромиздат, 1990. - 432с.
8. Юрьева,А.А. Математическое программирование [Текст] : учеб.пособие для студ.вузов. - 2-е изд.,испр. и доп. - СПб. : Лань, 2014. - 432с.
9. Яркина, Н. Н. Статистика : учебник / Н. Н. Яркина. — Керчь : КГМТУ, 2020. — 229 с. — ISBN 978-5-6042731-9-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/140646

6.3 Ресурсы сети «Интернет», необходимые для освоения дисциплины (модуля)

1. Электронно-библиотечная система издательства «Лань» [электронный ресурс]./ URL: http://e.lanbook.com/.
2. Сайт научной электронной библиотеки Elibrary.ru [электронный ресурс]./ URL:http://elibrary.ru/defaultx.asp

6.4. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Гонова О.В., Забелина Н.В. Экономико-математические методы: методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы аспирантов / О.В. Гонова, Н.В. Забелина – Иваново: ФГБОУ ВО Ивановская ГСХА, 2017 – 43с.
2. Ильченко А.Н. Практикум по экономико-математическим методам/А.Н.Ильченко О.Л. Ксенофонтова, Г.В. Канакина–М.:Финансы и статистика, 2009. – 288с.

6.5. Информационные справочные системы, используемые для освоения дисциплины (модуля) (при необходимости)

1. Научная электронная библиотека Elibrary.ru (http://elibrary.ru/defaultx.asp)
2. ЭБС издательства «ЛАНЬ» (www.e.lanbook.ru)
3. ЭБС «ЦНСХБ» (http://cnshb.ru/terminal/)
4. сайт Росстата РФ (https://rosstat.gov.ru/)
5. сайт Министерства сельского хозяйства РФ (https://mcx.gov.ru/?ysclid=m6gd3fxln4907030593)

6.6. Программное обеспечение, используемое для освоения дисциплины (модуля) (при необходимости)

1. Операционная система типа Windows
2. Пакет программ общего пользования Microsoft Office
3. Интернет-браузеры

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА, НЕОБХОДИМАЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

№ п/п	Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий и пр.	Краткий перечень основного оборудования
1	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа	укомплектована специализированной (учебной) мебелью, набором демонстрационного оборудования и учебно-наглядными пособиями, обеспечивающими тематические иллюстрации, соответствующие рабочей программе дисциплины, а также техническими средствами обучения (в том числе, переносными), служащие для представления учебной информации большой аудитории
2.	Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа	укомплектована специализированной (учебной) мебелью, переносными техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации
3	Учебная аудитория для групповых и индивидуальных консультаций	укомплектована специализированной (учебной) мебелью, переносными техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации
4	Учебная аудитория для текущего контроля и промежуточной аттестации	укомплектована специализированной (учебной) мебелью, переносными техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации
5	Помещение для самостоятельной работы	укомплектовано специализированной (учебной) мебелью, оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечено доступом в электронную информационно-образовательную среду организации

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)
«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

1. Перечень компетенций, формируемых на данном этапе

Шифр и наименование компетенции	Индикатор(ы) достижения компетенции / планируемые результаты обучения	Форма контроля*	Оценочные средства
СК-1 Способность и готовность участвовать в научных дискуссиях, выступать с докладами, проводить научные исследования и эксперименты с использованием математических, статистических и инструментальных методов в экономике	**ИД-1 СК-1** Знает принципы подготовки и выступления с докладом по проблеме исследования; математические, статистические и инструментальные методы в экономике; принципы научного эксперимента. **ИД-2 СК-1** Умеет при планировании научных исследований и интерпретации их результатов получать специальную информацию с использованием новейших информационно-коммуникационных технологий. **ИД-3 СК-1** Владеет навыками подготовки выступления с докладом и мультимедийным сопровождением. Использует математические, статистические и инструментальные методы в экономике в процессе научных исследований. Составляет развернутую схему проведения научного эксперимента.	За, 4 сем. Э, 5 сем.	База заданий для кейс-задач. Вопросы для самоконтроля и дискуссионного обсуждения. Тест для проверки остаточных знаний. Комплекты вопросов к зачету и экзамену.
СК-2 Способность разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем на основании экономико-математических методов и инструментальных средств	**ИД-1 СК-2** Содержание и основные направления, методы и средства разработки, теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем, объясняет систему экономико-математических методов и инструментальных средств, необходимые для разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем. **ИД-2 СК-2** Оценивать и подбирать оптимальные экономико-математические методы и эффективные инструментальные средства, применяемых для разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем. **ИД-3 СК-2** Опытом разработки теоретических и методологических положений анализа экономических процессов и систем, навыками выбора экономико-математических методов и инструментальных средств.	За, 4 сем. Э, 5 сем.	База заданий для кейс-задач. Вопросы для самоконтроля и дискуссионного обсуждения. Тест для проверки остаточных знаний. Комплекты вопросов к зачету и экзамену.
СК-3 Способность развития математического аппарата экономических исследований, методов их применения и встраивания в инструментальные средства для повышения обоснованности управленческих решений на всех уровнях экономики	**ИД-1 СК-3** Знает содержание и основные направления, методы и средства развития математического аппарата, систему методов применения и встраивания математического аппарата в инструментальные средства. **ИД-2 СК-3** Анализирует содержание и основные направления, методы и средства развития математического аппарата, объясняет выбор методов применения и встраивания математического аппарата в инструментальные средства. **ИД-3 СК-3** Владеет опытом развития математического аппарата экономических исследований, эффективными методами применения и встраивания математического аппарата в инструментальные средства.	За, 4 сем. Э, 5 сем.	База заданий для кейс-задач. Вопросы для самоконтроля и дискуссионного обсуждения. Тест для проверки остаточных знаний. Комплекты вопросов к зачету и экзамену.

* Форма контроля: Э – экзамен, За – зачет, ЗО – зачет с оценкой. Период проведения – указывается семестр обучения. Ячейка заполняется следующим образом, например: Э, 5 сем.

2. Показатели и критерии оценивания сформированности компетенций на данном этапе их формирования

Показатели	Критерии оценивания*			
	неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
	не зачтено	зачтено		
Полнота знаний	Уровень знаний ниже минимальных требований, имели место грубые ошибки	Минимально допустимый уровень знаний, допущено много негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, допущено несколько негрубых ошибок	Уровень знаний в объеме, соответствующем программе подготовки, без ошибок
Наличие умений	При решении стандартных задач не продемонстрированы основные умения, имели место грубые ошибки	Продемонстрированы основные умения, решены типовые задачи с негрубыми ошибками, выполнены все задания, но не в полном объеме	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с негрубыми ошибками, выполнены все задания в полном объеме, но некоторые с недочетами	Продемонстрированы все основные умения, решены все основные задачи с отдельными несущественными недочетами, выполнены все задания в полном объеме
Наличие навыков (владение опытом)	При решении стандартных задач не продемонстрированы базовые навыки, имели место грубые ошибки	Имеется минимальный набор навыков для решения стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы базовые навыки при решении стандартных задач с некоторыми недочетами	Продемонстрированы навыки при решении нестандартных задач без ошибок и недочетов
Характеристика сформированности компетенции	Компетенция в полной мере не сформирована. Имеющихся знаний, умений, навыков недостаточно для решения практических (профессиональных) задач	Сформированность компетенции соответствует минимальным требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков в целом достаточно для решения практических (профессиональных) задач, но требуется дополнительная практика по большинству практических задач	Сформированность компетенции в целом соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в целом достаточно для решения стандартных практических (профессиональных) задач	Сформированность компетенции полностью соответствует требованиям. Имеющихся знаний, умений, навыков и мотивации в полной мере достаточно для решения сложных практических (профессиональных) задач
Уровень сформированности компетенций	Низкий	Ниже среднего	Средний	Высокий

3. Оценочные средства

По нижеприведенным тематическим материалам проводится оценка знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих сформированность компетенций на данном этапе.

3.1. База заданий для кейс-задач.

Кейс-задание 1. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = в_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где aij – коэффициент в i – ом уравнении при j - ой переменной; bi –свободный член i – го уравнения, m – количество уравнений в системе, n - количество переменных.

Определение 1. Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Определение 2. Совместная система линейных уравнений называется определённой, если она имеет единственное решение, и неопределённой, если имеет бесчисленное множество решений.

Определение 3. Преобразования, которые систему линейных уравнений переводят в равносильную, эквивалентную ей систему, называются элементарными.

К элементарным преобразованиям относятся преобразования следующего вида:

1. Перестановка местами любых двух уравнений.
2. Умножение (деление) обеих частей уравнения на число, отличное от нуля.
3. Прибавление (вычитание) к обеим частям любого уровня соответствующих частей другого уравнения, умноженного на произвольное число, отличное от нуля.
4. Удаление из системы после её преобразования уравнения вида:

$0 \cdot x1 + 0 \cdot x2 + \ldots + 0 \cdot xn = 0$.

Определение 4. Уравнение системы называется линейно зависимым от других уравнений, если его можно получить из этих уравнений, используя элементарные преобразования, в противном случае оно называется линейно независимым.

Идея метода последовательного исключения неизвестных (метод Жордана – Гаусса).

Используя элементарные преобразования, необходимо в левой части каждого уравнения оставить по одной различной переменной с коэффициентом 1, тогда в правой части уравнения получим решение системы. Для этого нужно первое уравнение разделить на коэффициент при x1. Затем преобразованное первое уравнение поочерёдно умножить на соответствующие коэффициенты при переменной x1 в других уравнениях и полученный результат вычесть из этих уравнений.

Исключив переменную x1 из всех уравнений, кроме первого, тем же способом исключаем переменную x2 из всех уравнений, кроме второго. Для чего второе уравнение делим на коэффициент при x2, а затем вычитаем его из других уравнений, умножая на соответствующие коэффициенты при x2 в этих уравнениях. Потом исключаем переменную x3, и т. д.

Задания для самостоятельного решения

Системы уравнений 1.1-1.10 решить методом последовательного исключения неизвестных.

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -4 \\ 5x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 \quad 5x_3 - x_4 = 10 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 \quad - 2x_4 = 5 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 \quad + x_4 = 20 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 17 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$

Кейс-задание 2. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования относительно двух неизвестных:

$$c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \qquad (2)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad (3) \qquad (4)$$

где (2) – целевая функция задачи, (3) – основные ограничения, (4) – условия неотрицательности переменных.

Неравенствам (3) на плоскости соответствуют полуплоскости. Чтобы их построить, необходимо сначала построить прямые, отделяющие эти полуплоскости. Уравнения отделяющих прямых получаем их соответствующих неравенств путём замены знака неравенств на " = ". Отделяющие прямые лучше строить по двум точкам, которые являются точками пересечения с осями координат (у этих точек одна из координат равна нулю).

Чтобы выбрать полуплоскость, соответствующую заданному неравенству, достаточно проверить, принадлежит ли точка начала координат (0,0) полуплоскости, подставив

координаты (0,0) в неравенство. Если неравенство окажется справедливым, то принадлежит, в противном случае – нет.

Неравенства (3) должны выполняться одновременно. Это означает, что решение задачи будет лежать сразу на всех построенных полуплоскостях. С математической точки зрения это равносильно тому, что решение принадлежит пересечению построенных полуплоскостей.

Условие неотрицательности переменных (4) требует, чтобы из пересечения полуплоскостей выбрали ту часть, которая лежит в 1-ой четверти.

Целевая функция (2), как функция от двух переменных, имеет пространственное представление. Для изображения её на плоскости используют линии уровня, уравнения которых получаем из целевой функции, приравнивая её к различным числовым значениям:

$c1x1 + c2x2 = c$, где $c \in (-\infty, +\infty)$. (5)

Достаточно построить две линии уровня (выбрав произвольные значения С), чтобы, сравнив на них значения целевой функции, определить направление max или min.

Возможные варианты решения задачи линейного программирования графическим методом представлены на рис 1.

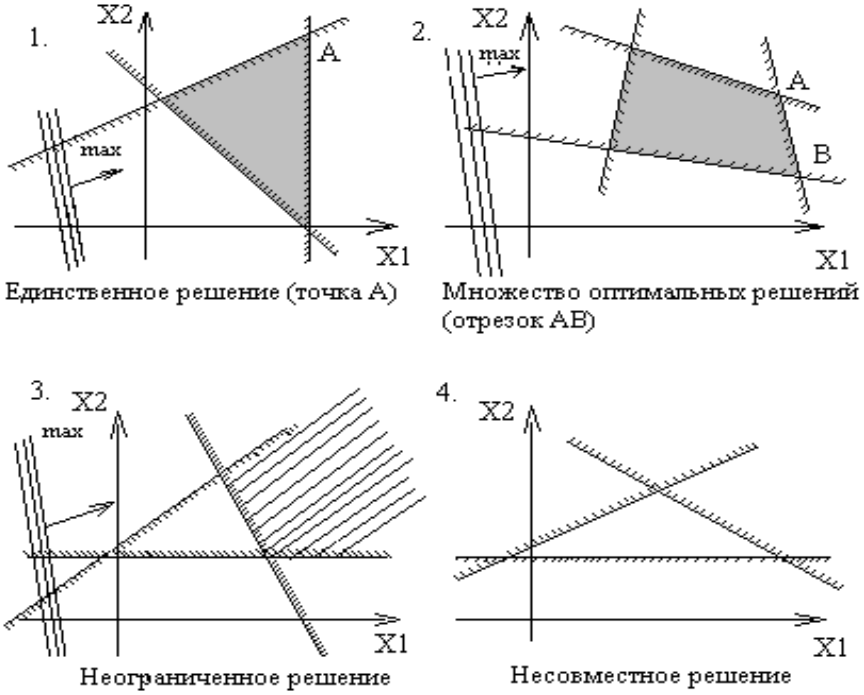

Рисунок 1- Возможные варианты решения задачи линейного программирования графическим методом

Задания для самостоятельного решения

Для задач 2.1-2.10 найти решение графическим методом.

2.1. f(x) = 2x1 + 4x2 → max (min)

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 40 \\ 12x_1 + 2x_2 \ge 24 \\ 2x_1 \le 6 \\ x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.2. f(x) = – x1→ max (min)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \\ -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.3. f(x) = 2x1 + 3x2 →·max (min)

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 12 \\ 2x_1 \le 6 \\ 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.4. f(x) = – x2→ max (min)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 7x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.5. f(x) = -x1 + x2 →·max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.6. f(x) =2 x1 – 3x2→ max (min)

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1 - 5x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.7. f(x) = 10x1 + 14x2 →·max (min)

$$\begin{cases} 10x_1 + 14x_2 \le 70 \\ x_1 + x_2 \ge 24 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.8. f(x) = x1-x2→ max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.9. f(x) = x1 + 2x2 →·max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.10. f(x) = – x2→ max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le -6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Кейс-задание 3. Решение задач линейного программирования симплекс – методом

Для решения задач линейного программирования был предложен симплекс-метод. Разработанный в 1947-1949 гг. американским математиком Дж. Данцигом. Идея состоит в целенаправленном переборе вершин многогранника допустимых решений (опорных планов) в направлении улучшения целевой функции.

Симплекс-метод – это универсальный метод решения задач линейного программирования, представляющий собой интерационный процесс, который начинается с одного решения и в поисках лучшего варианта движется по угловым точкам области возможных решений до тех пор. Пока не достигнет оптимального значения.

Симплекс – метод применяют к задачам линейного программирования, заданным в каноническом виде, где элементы вектора правых частей ограничений принимают неотрицательные значения:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \\ b_i \geq 0, i = 1,2,\ldots m \\ m \leq n. \end{cases} \qquad (6)$$

Основные положения, на которых базируется симплекс – метод

1. Каждая вершина многогранника допустимых решений обладает следующими свойствами:
- m её координат имеют значения ≥0 (их называют базисными переменными);
- остальные (n - m) координат равны нулю (их называют свободными переменными);
- вектор – столбцы матрицы коэффициентов А, соответствующие базисным переменным вершины являются линейно независимыми, т.е. с - помощью линейных преобразований их можно привести к единичной матрице.
2. Соседние вершины многогранника допустимых решений отличаются только одной базисной переменной.
3. Переход из одной вершины в другую осуществляется с помощью метода последовательного исключения неизвестных, который называется методом Жордана-Гаусса. В результате чего из базисного решения выводим одну переменную, а вводим другую. Причём, из свободных переменных, не вошедших в базис, вводим ту, которая больше всех уменьшает значение целевой функции. А из базисных переменных выводим ту, которая не нарушает условия неотрицательности базисных переменных у новой вершины. При этом вектор – столбцы матрицы ограничений А, соответствующие новой вершине, так же будет линейно независимыми, т.е. образовывать единичную матрицу.

Алгоритм симплекс – метода

1. Определение первоначального опорного решения (угловой точки).

Для поиска первого опорного решения можно использовать следующие методы:
- метод естественного базиса,
- метод искусственного базиса.

Метод естественного базиса применяется для задач линейного программирования, записанных в виде, где все ограничения неравенства имеют тип "≤" и элементы вектора правых частей ограничений неотрицательны.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{14}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{24}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n \\ b_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m. \end{cases} \qquad (7)$$

В этом случае задачу (7) приводим к каноническому виду (8), вводя в левую часть каждого ограничения неравенства самостоятельную переменную, которые и будут образовывать естественный базис.

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad x_{n+m} = b_m \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n+m \\ b_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases} \qquad (8)$$

Метод искусственного базиса применяется для задач, заданных в каноническом виде, или с ограничениями смешанного типа. Если в задаче ограничения смешанного типа, то её сначала преобразуем к каноническому виду , причем нужно отслеживать, чтобы элементы вектора правых частей были неотрицательными, а затем в каждое ограничение равенство водим по самостоятельной переменной yj , которые и будут образовывать искусственный базис. При этом в целевой функции переменные искусственного базиса записываются с большими отрицательными коэффициентами. В результате преобразований получим задачу вида (9).

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - My_1 - My_2 - \ldots - My_m \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \quad y_m = b_m \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n \\ y_i \ge 0, \ i = 1,2,\ldots,m \\ b_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases} \qquad (9)$$

2. Составление симплексной таблицы:

базис	Сбазис	b	C1	C2	…	Cn
			X1	X2	…	Xn
X1базис	C1базис	b1	a11	a12	…	a1n
X2базис	C2базис	b2	a21	a22	…	a2n
…	…	…	…	…	…	…
Xмбазис	Cmбазис	bm	am1	am2	…	amn
		(Сбазис,b)	Δ_1	Δ_2	…	Δn

Рисунок 2- Симплексная таблица

Правила заполнения первой симплексной таблицы

1) Вместо C1, C2, …, Cn записываем соответствующие коэффициенты целевой функции.
2) Вместо aij записываем коэффициенты при неизвестных из основных ограничений задачи.
3) Вместо Xiбазис записываем имена переменных, вошедших в базис, в той последовательности, в которой они образуют единичную матрицу.
4) Вместо Ciбазис записываем коэффициенты целевой функции при соответствующих базисных переменных.
5) Вместо bi записываем элементы вектора правых частей задачи.
6) $$(C^{базис}, b) = \sum_{i=1}^{m} C_i^{базис} \cdot b_i. \qquad (10)$$
7) $$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_i^{базис} \cdot a_{ij} - C_j,\ j = 1,2,...,n \qquad (11)$$

Оптимальное значение переменных соответствует элементам из столбца «b» последней симплексной таблицы, а максимальное значение целевой функции содержимому ячейки (сбазис ,b).

3. Проверка первоначального плана на оптимальность.

Выясняем, имеется ли хотя бы одно отрицательное число Δj. Если таких чисел нет, то найденное опорное решение является оптимальным. Если же среди чисел Δj имеются отрицательные, то либо переходят к новому опорному решению, либо устанавливают неразрешимость задачи, когда все коэффициенты столбца матрицы ограничений A, соответствующего отрицательному Δj, тоже отрицательны.

4. Определение ведущего (направляющего) столбца. Ведущий столбец показывает, какая переменная на следующем шаге перейдет из свободных (небазисных) в базисные переменные. Направляющий столбец (номер вводимой в базис переменной) определяем наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δj. Пусть это будет к-ый столбец.

5. Определение разрешающей (направляющей) строки. Разрешающая строка определяет ту переменную, которая на следующем шаге выйдет из базиса и станет свободной (небазисной). Направляющая строка (номер выводимой из базиса переменной) соответствует минимальному из всех соотношений $\frac{b_i}{a_{ik}}$ для положительных значений aik.

6. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплекс-таблицы методом Жордана – Гаусса. Строим новую симплекс – таблицу.

Правила формирования новой симплекс-таблицы:

1) В левом столбце записывается новый базис;
2) Разрешающий элемент заменяется обратной его величиной $\frac{1}{\grave{a}_{ik}}$;
3) Элементы разрешающей строки замещают соответствующими отношениями прежних коэффициентов этой строки к разрешающему элементу;
4) Элементы ведущего столбца определяют делением прежних коэффициентов этого столбца на разрешающий элемент и взятых с противоположным знаком;
5) Оставшиеся элементы симплексной таблицы вычисляют по правилу прямоугольника.

7. Выполнение этапа 3. И так далее пока не будет найдено оптимальное решение.

Задания для самостоятельного решения.

В задачах 3.1-3.10 найти решение симплекс-методом.

3.1. f(x) = - x1 + 2x2 → max 3.2. f(x) = x1 +x2 – x3 + + x6→max

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 23 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_5 + x_6 = 4 \\ x_2 - 2x_5 - x_6 = 5 \\ -x_3 + 3x_5 - x_6 = 7 \\ -x_3 + x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_6 \ge 0 \end{cases}$$

3.3. f(x) = x1 - 3x2 + x3 → max

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.4. f(x) = 2x1 – 3x2 →max

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ -x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ 5x_1 - 4x_2 \le 40 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.5. f(x) = -2x1 + x2 -3x3 → min

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 \le -8 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.6. f(x) = 2x1 – 2x2 – x3 – x4 →min

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

3.7. 2x1 – 2x2 – x3 – x4 →max

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

3.8. f(x) = -2x1 + x2 -3x3 → min

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.9. f(x) = x1 + x2 + x3 + x4 →min

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

3.10. f(x) = 7x1 + 4x2 – 3x3 + 2x4 →min

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \le 45 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 68 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Кейс-задание 4. Двойственные задачи линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, которую называют двойственной по отношению к исходной задаче. Исходная и двойственная задачи тесно связаны между собой и образуют единую пару двойственных задач.

Прежде чем строить двойственную задачу, предварительно исходную задачу линейного программирования нужно привести к виду, где все ограничения неравенства имеют один тип, а целевая функция - направление, противоположное типу ограничений неравенств.

Правила построения двойственной задачи.

1. Целевая функция в двойственной задаче меняет своё направление на противоположное.
2. Количество двойственных переменных равно количеству основных ограничений исходной задачи.
3. Двойственная переменная, соответствующая ограничению равенству, является неограниченной по знаку, а соответствующая ограничению неравенству – неотрицательной.

4. Вектор правых частей ограничений исходной задачи является вектором коэффициентов целевой функции в двойственной задаче.

5. Вектор коэффициентов целевой функции исходной задачи является вектором правых частей ограничений в двойственной задаче.

6. Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи – это транспонированная матрица коэффициентов исходной задачи, т.е. строка коэффициентов исходной задачи, является столбцом коэффициентов двойственной задачи.

7. Неотрицательным переменным исходной задачи соответствуют ограничения неравенства в двойственной задаче, причем тип неравенства меняется на противоположный, по сравнению с исходной задачей. А неограниченной переменной исходной задачи соответствует ограничение равенство в двойственной задаче.

Соотношение двойственности является симметричным, т.е. двойственная задача по отношению к двойственной совпадает с исходной.

Если исходная задача линейного программирования записана в стандартном виде:

$$(c, x) \to \max$$

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0, \end{cases} \qquad (12)$$

то соответствующая ей двойственная задача записывается следующим образом:

$$(b, y) \to \min$$

$$\begin{cases} A^T y \ge C \\ y \ge 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Задания для самостоятельного решения.

Для задач линейного программирования 4.1-4.10 построить двойственные задачи.

4.1. $x1 + 2x2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \ge -5 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4.2. $3x1 + 3x2 - 4x3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 18 \\ 4x_1 \qquad - 5x_3 \le 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.3. $2x1 - 3x2 + x3 - 3x4 + x5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 8 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

4.4. $x1 + 3x2 - 5x4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 \qquad - 3x_4 \le 30 \\ 4x_1 - 2x_2 \qquad + 8x_4 \le 32 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.5. $27x1 + 10x2 + 15x3 + 28x4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.6. $-2x1 + x4 + 3x5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \qquad + 3x_4 + x_5 = 8 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6 \\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

4.8. $x1 - 2x2 - 4x3 + 2x4 + 3x5 \to \max$

4.7. $x1 - 2x2 + 5x3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 18 \\ \quad -2x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad \geq 24 \\ -x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 20 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \geq 19 \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4.9. $-3x1 + 4x2 - 6x3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

4.10. $4x1 + x2 - 2x3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq -12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Кейс-задание 5. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Рассмотрим следующую транспортную задачу

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,...,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,...,n \\ x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,,...,n \end{cases} \qquad (14)$$

Типы математических моделей транспортной задачи

В модели оптимального планирования перевозок должно выполнятся равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} \grave{a}_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (24)$$

Равенство означает, что суммарный запас груза должен равняться суммарной потребности.

Модели, в которых выполняется балансовое равенство, называют закрытыми, в которых равенство не выполняется – открытыми $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Уравнение баланса выступает обязательным условием решения закрытой транспортной задачи. Поэтому когда в исходных условиях дана открытая задача. Её необходимо привести к закрытой форме.

Способы преобразования транспортной задачи открытого типа к закрытому

1. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного (n+1)-го потребителя, у которого потребность в продукции составит $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а затраты на перевозку продукции $C_{i(n+1)} = 0, i = 1,2,...,m.$

2. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивного (m+1)-го производителя, объём производимой продукции которого равен $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а затраты на транспортировку продукции $C_{(m+1)j} = 0, j = 1,2,...,n.$

Алгоритм метода потенциалов

1. Строим таблицу для метода потенциалов

Пункт производства		Пункт потребления				Объемы производства
		1	2	…	n	
		β1	β2	…	βn	
1	α1	X11 C11	X12 C12	…	X1n C1n	a1
2	α2	X21 C21	X22 C22	…	X2n C2n	a2
…	…	…	…	…	…	…
m	αm	Xm1 Cm	Xm2 Cm2	…	Xmn Cmn	am
Объёмы потребления		b1	b2	…	bn	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Рисунок 3-Таблица метода потенциалов

Правила заполнения первой таблицы метода потенциалов

1) Проставляем номера пунктов производства и пунктов потребления.

2) Из условий задачи в соответствующие клетки таблицы переносим значения ai (i=1,2,…,m),bj (j=1,2,..,n) и cij (i=1,2,…,m;j=1,2,…,n), причём cij записываем в правом верхнем углу клетки.

3) В середину клеток, стоящих на пересечении пунктов производства и пунктов потребления записываем ненулевые значения Xij первого опорного решения. Эти клетки будем называть занятыми, а остальные клетки свободными.

4) Рассчитываем значения потенциалов αi (i=1,2,…,m) и βj (j=1,2,…,n), используя условие βj- α i=cij для заполненных клеток таблицы. Причём α1 всегда полагаем равным 0.

5) Рассчитываем значение αij и размещаем их в свободных клетках таблицы.

2. Находим первое опорное решение. Существуют два метода построения первого опорного решения (плана).

Методы поиска первого опорного решения

1). Метод северо-западного угла. Распределять грузы начинаем с северо-западной клетки таблицы. Сначала удовлетворяем потребность 1-го потребителя за счёт продукции 1-го производителя. Если её будет недостаточно, тогда оставшуюся потребность удовлетворяем за счёт 2-го производителя и т.д.

Когда потребность 1-го потребителя будет удовлетворена полностью, то начнём удовлетворять потребность второго потребителя за счёт той продукции, которая осталась у 1-го производителя. Если у него ничего не осталось, то за счёт оставшейся продукции у 2-го производителя и т.д.

2). Метод минимального элемента:

- из всех Cij выбираем самое маленькое;
- в эту клетку ставится требуемый j-ым потребителем объем продукции, или только то количество, которое имеется у i-го производителя;
- выбирается следующее наименьшее Cij и в клетку i-ой строки и j-го столбца заносится обьем перевозимой продукции по тому же принципу;
- операцию повторяют до тех пор, пока весь груз не будет распределён.

Если имеется несколько Cij с одинаковыми значениями, то последовательно заполняем клетки, соответствующие этим значениям.

3. Проверка вырожденности плана. Число ненулевых x ij (т.е. занятых клеток таблицы) должно быть равно (n+m-1). Если их больше, то допущена ошибка при расчете.

Если их меньше, то имеем дело с вырожденным решением. В случае вырожденности к неотрицательным x ij дополнительно выбираем несколько x ij = 0, чтобы их количество стало равным (n+m-1), и при этом было удобно рассчитать потенциалы α_i и β_j.

4. Определение целевой функции путем суммирования произведений тарифов на объемы перевозимого груза по всем занятым клеткам транспортной таблицы.

5. Проверка опорного плана на оптимальность.

5.1. Расчет потенциалов α_i и β_j из условия $\beta_j - \alpha_i = C_{ij}$ для $x_{ij} \neq 0$, т.е. для заполненных клеток таблицы. Так как количество $x_{ij} \neq 0$ равно (n+m-1), а количество потенциалов αi и βj равно (n+m), то α1 полагаем равно нулю.

5.2. Расчет оценок свободных клеток. Для каждой свободной клетки, где $x_{ij} = 0$, вычисляем $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - C_{ij}$.

Если среди чисел α_{ij} нет положительных, то получено оптимальное решение. Если имеются положительные α_{ij}, то переходим к новому опорному решению.

6. Перераспределение груза. Среди положительных чисел α_{ij} выбираем максимальное. Для свободной клетки, которая соответствует максимальному положительному α_{ij}, строим цикл пересчёта и производим сдвиг продукции по циклу пересчёта.

Цикл пересчёта – это ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья вдоль строк и столбцов, начинается ломаная в пустой клетке пересчёта, соответствующей максимальному положительному αij.

Сдвиг по циклу пересчёта – это процесс перемещения грузов в пределах клеток, связанных циклом пересчёта, который осуществляется по следующим правилам:

- каждой из клеток, находящихся в вершинах цикла, приписывается определенный знак "+" или "-", причем свободной клетке приписывается знак "+", а всем остальным поочередно "-", "+" и т.д.;

- в свободную клетку цикла переносим наименьшее из чисел Xij, стоящих в минусовых клетках. И одновременно это же число прибавляем к значениям Xij, стоящим в плюсовых клетках, и вычитаем из Xij, стоящих в минусовых клетках цикла.

В результате этих действий мы получаем новый опорный план, для которого строим новую таблицу.

7. Получение нового опорного плана. Полученное опорное решение проверяем на оптимальность, т.е. повторяем все действия с этапа 2. Описанная процедура повторяется несколько раз (итераций) пока не будет найдено оптимальное решение.

Задания для самостоятельного решения.

Решить следующие транспортные задачи 5.1-5.10 методом потенциалов.

5.1.

Производители	Потребители			Объём производства
	1	2	3	
1	3	5	6	25
2	6	6	11	25
3	10	6	14	25
Объём потребления	25	30	20	

5.2.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	3	2	4	1	50
2	2	3	1	5	40
3	3	2	4	4	20
Объём потребления	20	25	35	20	

5.3

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	6	3	1	4	40
2	2	5	2	7	40
3	4	10	8	9	60
Объём потребления	30	20	50	50	

5.4.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	4	11	3	1	80
2	5	6	7	4	120
3	8	7	6	2	40
4	14	10	10	21	100
Объём потребления	120	20	90	110	

5.5.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	8	11	1	4	80
2	5	2	7	3	20
3	10	4	3	5	30
Объём потребления	54	36	25	15	

5.6.

Производители	Потребители			Объём производства
	1	2	3	
1	7	2	4	40
2	3	8	9	25
Объём потребления	10	35	20	

5.7.

Производители	Потребители			Объём производства
	1	2	3	
1	6	4	2	40
2	3	5	7	60
Объём потребления	20	70	10	

5.8.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	4	3	2	7	46
2	1	1	6	4	34
3	3	5	9	4	40
Объём потребления	40	35	30	45	

5.9.

Производители	Потребители		Объём производства
	1	2	
1	7	4	70
2	5	9	45
3	3	8	15
Объём потребления	40	90	

5.10.

Производители	Потребители				Объём производства
	1	2	3	4	
1	2	4	5	1	60
2	2	3	9	4	70
3	8	4	2	5	50
Объём потребления	40	30	20	50	

Кейс-задание 6. Решение задач нелинейного программирования графическим методом

Графическим методом решаются задачи нелинейного программирования относительно двух переменных следующего вида

$f(x_1,x_2)\to\max\ (\min)$

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2)\le b_1 \\ g_2(x_1,x_2)\le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,x_2)\le b_m, \end{cases} \qquad (15)$$

где f, g_i – некоторые известные функции, b_i – заданные числа.

Графически можно проиллюстрировать задачи линейного программирования относительно одной (рис. 6) или двух переменных (рис.7).Причем оптимальное значение может находиться как на границе, так и внутри допустимо множества.

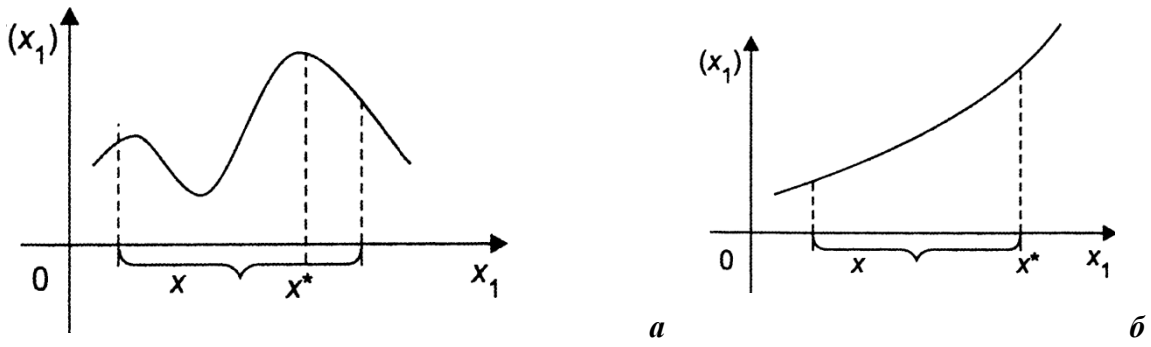

Рисунок 4- Геометрическая интерпретация задачи нелинейного программирования в случае одной переменной:

а- оптимальное решение x^* внутри допустимого множества *x*;

б- оптимальное решение x^* на границе допустимого множества *x*.

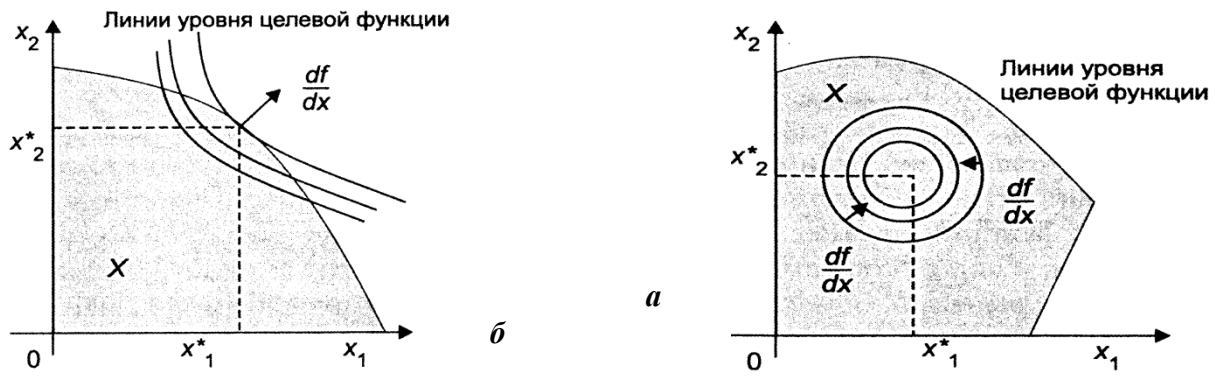

Рисунок 5- Геометрическая интерпретация задачи нелинейного программирования в случае двух переменных

а- оптимальное решение ($x_{1,}^{*}\ x_{2,}^{*)}$ на границе допустимого множества *x*;

б- оптимальное решение ($x_{1,}^{*}\ x_{2,}^{*)}$ внутри допустимого множества *x*.

Алгоритм графического метода

1. Для каждого ограничения задачи (29) на плоскости определяем множество допустимых точек. Чтобы их выделить, сначала необходимо построить кривую, отделяющую эти точки. Уравнение отделяющей кривой получаем из соответствующего неравенства, заменив знак неравенства на знак "=". Отделяющая кривая разобьёт плоскость на два множества. Чтобы выбрать множество, соответствующее заданному неравенству, нужно проверить, принадлежит ли точка начала координат (0,0) этому множеству, подставив координаты (0,0) в неравенство. Если неравенство будет справедливым, то выбираем множество, содержащее начало координат. Находим пересечение допустимых множеств, построенных для каждого ограничения задачи (29).
2. Целевая функция задачи $f(x_1,x_2)$, как функция от двух переменных, имеет пространственное представления. Поэтому для изображения её на плоскости используют *линии уровня*. Уравнения линий уровня получаем из целевой функции, приравнивая её к различным числовым значениям, т.е. они будут иметь следующий вид
   $F(x_1,x_2)=C$, где $C \in (-\infty,+\infty)$ (16)
3. Выбираем направление max для целевой функции, которое будет определяться вектором, составленным из первых частных производных целевой функции
   $$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1};\frac{\partial f}{\partial x_2}\right). \qquad (17)$$
4. Визуально определяем оптимальные точки задачи и вычисляем их координаты, как результат пересечения двух кривых, или касательных, а этим кривым.

Задания для самостоятельного решения.

Решить следующие задачи 6.1-6.2 нелинейного программирования графическим методом.

6.1 $f(x) = (x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 \to \max\ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6.2. $f(x) = x_1 x_2 \to \max\ (\min)$

$$\begin{cases} (x_1-5)^2+(x_2-3)^2 \ge 9 \\ (x_1-5)^2+(x_2-3)^2 \le 36 \\ x_1+x_2 \ge 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6.3. $f(x) = x_1 x_2 \to \max$

6.4. $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max\ (\min)$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

6.5. f(x) = $4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \le 0 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$

6.6. f(x) = $3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ x_1 x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6.7. f(x) = $x_1^2 + x_2^2 \to$ max (min)

$$\begin{cases} (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6.8. f(x) = $(x_1-4)^2+(x_2-4)^2 \to$max (min)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6.9. f(x) = $(x_1-7)\,(x_2-1) \to$max (min)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6.10. f(x) = $-x_1 + 3x_2 \to$ max (min)

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 + 1) \le 16 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Кейс-задание 7. Решение задач нелинейного программирования методом множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max \qquad (18)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i, i = 1,2,\ldots,m & (19) \\ x_i \ge 0, j = 1,2,\ldots,n, & (20) \end{cases}$$

где f-выпуклая (вогнутая) функция и область допустимых значений, определённая ограничениями (19), (20) является выпуклой, кроме того, функция f и g_i является непрерывно дифференцируемыми.

Основная идея метода решения этой задачи заключается в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой специально построенной функции Лагранжа, при этом одновременно будет найдено и оптимальное решение исходной задачи.

Для решения этой задачи методом множителей Лагранжа каждому ограничению (19) в соответствие ставят переменную y_i (i=1,2,…,m), которые называют *<u>множителями Лагранжа</u>*. А затем строят *<u>функцию Лагранжа</u>*

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \qquad (21)$$

Доказано, что оптимальная точка $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*; y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ для функции Лагранжа (20) является и оптимальным решением задачи нелинейного программирования (18)-(20). Необходимые и достаточные условия оптимальности, вытекающие из теоремы Куна – Таккера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, y^*) \le 0, j = 1,2,...,n \\ x_j^* \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, y^*) = 0, j = 1,2,...,n \\ x_j \ge 0, j = 1,2,...,n \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_i}(x^*, y^*) \ge 0, i = 1,2,...,m \\ y_i^* \dfrac{\partial L}{\partial y_i}(x^*, y^*) = 0, i = 1,2,...,m \\ y_i^* \ge 0, i = 1,2,...,m \end{cases} \tag{22}$$

Алгоритм метода множителей Лагранжа

1. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda(b_i - g_i(x_1, x_2, ...x_n)), \tag{23}$$

Где $\lambda_i (i = 1,2,...,m)$ - множители Лагранжа.

2. Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x_j и λ_i и приравниваем их к нулю (применяя необходимые условия локального экстремума функции) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ...x_n)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1,n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_{1,} x_{2,}, ..., x_n) = 0, i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{24}$$

В итоге получим систему из (n + m) уравнений с (n + m) переменными.

3. Решая систему находим точки $(x_1*, x_2*, ..., x_n*, \lambda_1*, \lambda_2*, ..., \lambda_m*)$, в которых функция Лагранжа может иметь экстремум.

4. Среди точек, подозрительных на экстремум $(x_1*, x_2*, ..., x_n*)$, определяем точки локального экстремум. Если определить Гессе, составленный из вторых частных производных целевой функции $f(x_{1,}, x_2, ..., x_n)$ в точке $(x_1*, x_2*, ..., x_n*)$ положительно (отрицательно) определен, то имеем локальный min (max).

Задания для самостоятельного решения.

Решить следующие задачи 7.1-7.10 нелинейного программирования методом множителей Лагранжа.

7.1. f(x) = $x_1x_2x_3x_4$→max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

7.2 f(x) = $x_1x_2x_3$→max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_1x_2 + x_1x_3 = 12 \end{cases}$$

7.3. f(x) = $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

7.4 f(x) = $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ →max (min)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7.5. f(x) = $x_1^2 - x_2^2 + x_3 \to$ max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$$

7.6. f(x) = $x_1 x_2 x_3 \to$ max (min)

$$\begin{cases} 2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

7.7. f(x) = $x_1 x_2 + x_2 x_3 \to$ max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

7.8. f(x)=$3x_1^2 - 2x_1 + 2x_2 + 4x_2 x_3 \to$ max(min)

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_2^2 = 19 \\ x_1 + 2x_2 x_3 = 11 \end{cases}$$

7.9. f(x) = $x_1 x_2 x_3 \to$ max (min)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_2 = 8 \end{cases}$$

7.10. f(x) = $x_1^2 - x_2^3 + x_3^4 \to$ max

$x_1 + x_2 + x_3 = 18$

3.2. Вопросы для самоконтроля и дискуссионного обсуждения

1. Дайте определение понятия «линейное программирование».
2. Приведите формы записи задачи линейного программирования.
3. Дайте определение плана и области допустимых решений задачи линейного программирования.
4. Какие преобразования, применяемые к системе линейных уравнений, являются тождественными? Перечислите их.
5. Дайте определение опорного, невырожденного и оптимального планов задачи линейного программирования.
6. Что называется каноническим видом (представлением) задачи линейного программирования?
7. Каким образом задача линейного программирования может быть приведена к каноническому виду?
8. Опишите алгоритм решения системы линейных уравнений методом Жордана-Гаусса.
9. Перечислите достоинства и недостатки метода последовательного исключения неизвестных.
10. Сформулируйте основные понятия геометрической интерпретации задачи линейного программирования.
11. Какие задачи линейного программирования могут быть решены с помощью графического метода.
12. Изложите алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом.
13. Опишите, каким образом при использовании графического метода можно обнаружить, что задача линейного программирования не имеет решения.
14. Перечислите возможные варианты решения задачи линейного программирования графическим методом.
15. Что такое область допустимых значений задачи линейного программирования? Чем определяют границы ОДЗ?
16. Как геометрически изображается целевая функция задачи линейного программирования? Что такое линия уровня целевой функции? Как получить уравнение для линии уровня?
17. Какому расположению линии уровня целевой функции соответствует оптимальное решение задачи линейного программирования?
18. Какие недостатки присущи графическому методу решения задач линейного программирования.
19. Каким условиям должна удовлетворять система ограничений, чтобы задача линейного программирования имела первоначальный опорный план?

20. Перечислите правила построения первой симплексной таблицы. Изложите алгоритм симплексного метода.
21. Какие задачи линейного программирования решаются методом искусственного базиса? Изложите алгоритм метода искусственного базиса.
22. Каким образом, используя метод искусственного базиса, можно обнаружить, что область допустимых решений задачи пуста?
23. В чем смысл итерационной процедуры симплекс- метода?
24. Как определяют вводимую в базис переменную? Как определяют выводимую из базиса переменную
25. Как определяют разрешающую строку симплекс-таблицы на данной итерации?
26. Как производят расчет элементов новой симплекс-таблицы?
27. Какую задачу называют двойственной задачей линейного программирования?
28. Какая форма представления прямой задачи используется при построении двойственной?
29. Перечислите правила построения двойственной задачи. По какой схеме строится двойственная задача?
30. Что такое «двойственные переменные», ассоциированные с ограничениями прямой задачи?
31. Докажите первую основную теорему двойственности и изложите ее экономическую интерпретацию.
32. Какие виды двойственных задач существуют? Перечислите свойства, которыми обладают симметричные двойственные задачи.
33. Докажите вторую основную теорему двойственности и дайте ее экономическую интерпретацию.
34. Как связаны между собой решения прямой и двойственной задач?
35. Запишите математическую модель закрытой транспортной задачи.
36. В чем состоит отличие между открытой и закрытой моделями транспортной задачи линейного программирования? Опишите способы преобразования транспортной задачи открытого типа к закрытому.
37. Каковы основные этапы общей схемы решения транспортной задачи?
38. Изложите методы построения первоначального опорного плана транспортной задачи.
39. Какие особенности имеет алгоритм решения открытой транспортной задачи?
40. Что такое вырожденный план. Если план вырожден, как поступать дальше?
41. В чем особенности метода минимального элемента и метода северо-западного угла? Какой метод поиска начального решения даёт лучший результат?
42. По каким правилам строится цикл, используемый для преобразования решения, размещенного в транспортной таблице?
43. Каким образом, используя оценки свободных клеток, можно проверить решение на оптимальность, если целевая функция задачи максимизируется? Минимизируется?
44. Как изменяется целевая функция после преобразования решения транспортной задачи с помощью цикла?
45. Какая задача математического программирования называется задачей нелинейного программирования?
46. Как формулируется задача нелинейного программирования? Запишите модель нелинейного программирования.
47. Сформулируйте основные понятия геометрической интерпретации задачи нелинейного программирования.
48. Изложите алгоритм решения задачи нелинейного программирования графическим методом.
49. Что называется условным экстремумом функции двух переменных?
50. В чём суть метода множителей Лагранжа? Как составляется функция Лагранжа для моделей нелинейного программирования?
51. Какие существуют типы задачи нелинейного программирования, чем они различаются?

52. Сформулируйте необходимые условия оптимальности в задаче безусловной оптимизации.
53. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
54. Дайте определение выпуклой и вогнутой функции.
55. Перечислите методы решения моделей нелинейного программирования.

3.3. Тест для проверки остаточных знаний

1. Запись задачи линейного программирования в матричном виде – это:

а) $\begin{cases} Ax \le в \\ x \ge 0 \end{cases}$

б) $\begin{array}{l} (c, x) \to \max \\ Ax \le в \end{array}$

в) $\begin{array}{l} (c, x) \to \max \\ \begin{cases} Ax \le в \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}$

г) $\begin{array}{l} (c, x) \to \max \\ \begin{cases} Ax \ge в \\ x \le 0 \end{cases} \end{array}$

2. Решение оптимизационных задач сводится к нахождению:
а) числа ограничений задачи и значения целевой функции;
б) значения переменных величин и целевой функции;
в) значения целевой функции задачи;
г) значения переменных величин задачи.

3.Целевая функция задачи – это:
а) система ограничений задачи;
б) условие по выполнению плановых показателей;
в) оптимальное значение переменных задачи;
г) цель задачи, выраженная в математической форме.

4. Как изменить направление целевой функции:
а) умножить ее на «-1»;
б) вычесть из нее дополнительные переменные;
в) добавить к ней достаточно большое число;
г) разделить ее на достаточно большое число.

5. Каким способом можно преобразовать стандартную задачу линейного программирования к каноническому виду:
а) вычесть из левой части каждого ограничения дополнительную переменную;
б) заменить знак ограничений «≤» на знак «=»;
в) добавить к левой части каждого ограничения дополнительную переменную;
г) ввести искусственный базис.

6. Количество переменных в двойственной задаче линейного программирования равно:
а) количеству переменных в прямой задаче;
б) количеству основных ограничений прямой задачи;

в) количеству дополнительных переменных прямой задачи;
г) количеству основных ограничений двойственной задачи.

7. Двойственные оценки – это:
а) значение небазисных переменных;
б) оптимальное решение двойственной задачи;
в) значение дополнительных переменных;
г) оптимальное решение прямой задачи.

8.Для нахождения оптимального решения (плана) задачи линейного программирования может быть использован один из следующих методов:
а) распределительный метод;
б) метод наименьших квадратов;
в) метод Ньютона;
г) симплекс – метод.

9.Какой метод не может быть использован для поиска первого опорного решения в транспортной задаче:
а) метод северо-западного угла;
б) метод минимального элемента;
в) симплекс-метод;
г) метод дифференциальных рент.

10. В какой форме записана задача линейного программирования

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le в_i, i = 1,2,\ldots,m \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

:

а) матричная форма;
б) развёрнутая форма;
в) сокращенная форма;
г) каноническая форма.

11. Для нахождения оптимального решения (плана) транспортной задачи может быть использован один из следующих методов:
а) метод северо-западного угла;
б) метод наименьших квадратов;
в) метод максимального правдоподобия;
г) метод потенциалов.

12. Если в задаче линейного программирования имеются ограничения равенства, то при решении ее симплекс-методом используется:
а) искусственный базис;
б) естественный базис;
в) дополнительные переменные;
г) двойственные переменные.
13. Экономико-математическая модель транспортной задачи считается закрытой, если:
а) число переменных задачи равно числу основных ограничений задачи;
б) сумма объёмов производства продукции равна сумме объёмов ее потребления;

в) от каждого производителя перевозится ненулевое количество продукции каждому потребителю;
г) сумма объёмов производства продукции больше суммы объёмов её потребления.

14. Какие задачи математического программирования можно решать графическим методом:
а) все задачи линейного программирования;
б) задачи, в которых одна или две переменных;
в) задачи с целочисленными коэффициентами;
г) задачи нелинейного программирования.

15. Дополнительная переменная основного ограничения задачи линейного программирования показывает:
а) насколько левая часть ограничения отличается от правой части в соответствии с типом ограничения;
б) как изменится целевая функция при изменении правой части ограничения;
в) дополнительную потребность в производственных ресурсах;
г) объём используемых ресурсов.

16. Задача математического программирования называется несовместной, если:
а) множество допустимых решений задачи пусто;
б) множество допустимых решений задачи не ограничено;
в) целевая функция задачи не ограничена;
г) количество ограничений больше количества переменных.

17. Транспортная задача является вырожденной, если:
а) количество заполненных грузами клеток таблицы равно количеству потенциалов;
б) количество заполненных грузами клеток таблицы на 1 меньше количества потенциалов;
в) количество заполненных грузами клеток таблицы на 1 больше количества потенциалов;
г) количество заполненных грузами клеток таблицы равно количеству производителей и потребителей.

18.Задачей дробно-линейного программирования называется задача математического программирования, в которой:
а) коэффициенты при переменных принимают дробные значения;
б) целевая функция и все ограничения описываются линейными функциями;
в) переменные задачи принимают только дробные значения;
г) целевая функция представляет отношение двух линейных функций, и все ограничения описываются линейными функциями.

19. Целевая функция задачи линейного программирования достигает оптимального значения:
а) в одной из вершин многогранника допустимых решений задачи;
б) внутри множества допустимых решений задачи;
в) во всех точках границы множества допустимых решений задачи;
г) только при отрицательных значениях переменных задачи.

20. Соотнесите термин и его определение:

① опорное решение ② допустимое решение задачи ③ оптимальное решение	а) точка, удовлетворяющая ограничениям задачи б) точка, в которой целевая функция не достигает максимального значения в) вершины многоугольника допустимых решений задачи г) допустимое решение, в котором целевая функция достигает своего максимального значения

21. Что собой представляет функция Лагранжа:
а) это сумма целевой функции задачи и основных ограничений задачи, умноженных на двойственные переменные;
б) целевая функция задачи нелинейного программирования;
в) сумма функций, описывающих основные ограничения задачи линейного программирования;
г) целевая функция двойственной задачи линейного программирования.

22. Задача линейного программирования является задачей параметрического программирования, когда:
а) все коэффициенты задачи зависят от разных параметров;
б) либо коэффициенты целевой функции, либо коэффициенты матрицы ограничений, либо элементы вектора правых частей зависят от одного параметра;
в) отдельные переменные задачи зависят от параметров;
г) только коэффициенты целевой функции зависят от параметра.

23. Для нахождения оптимального решения задачи нелинейного программирования может быть использован один из следующих методов:
а) распределительный метод;
б) метод наименьших квадратов;
в) метод множителей Лагранжа;
г) симплекс – метод.

24. Целочисленной задачей линейного программирования называется задача математического программирования, в которой:
а) коэффициенты при переменных принимают целые значения;
б) все или часть переменных принимают только целые значения;
в) элементы правой части ограничений принимают целые значения;
г) коэффициенты целевой функции целочисленные.

3.4. Комплекты вопросов к зачету и экзамену

3.4.1. Вопросы к зачету

1. Понятие задачи математического программирования.
2. Классификация задач математического программирования.
3. Виды задач, формы записи.
4. Теорема о выпуклости множества допустимых решений задачи линейного программирования.
5. Метод Жордана-Гаусса.
6. Алгоритм симплекс-метода
7. Графический метод решения задачи линейного программирования.
8. Метод искусственного и естественного базиса.
9. Понятие двойственной задачи и правила ее построения.
10. Теоремы двойственности.
11. Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач.
12. Метод потенциалов решения транспортной задачи
13. Методы нахождения начального допустимого базисного решения транспортной задачи
14. Транспортная задача
15. Элементы теории игр.
16. Методы решения игровых задач.
17. Игры с «природой».
18. Применение игр с «природой» в экономике.
19. Понятие модели и моделирования.

20. Математические модели в экономике и их классификация.
21. Основные этапы моделирования.
22. Выбор математического метода решения задачи.
23. Формы записи экономико-математических моделей: математическая модель и числовая модель.
24. Назначение и основные направления экономико-математического анализа.
25. Анализ оптимальных решений.

3.4.2. Вопросы к экзамену

1. Оценка эффективности введения новых технологических способов и новых ограничений.
2. Использование двойственных оценок в определении степени дефицитности и норм взаимозаменяемости ресурсов и как меры определения рентабельности отдельных способов производства.
3. Геометрическая интерпретация задач нелинейного программирования.
4. Методы решения задач с ограничениями – равенствами.
5. Методы решения задачи выпуклого программирования.
6. Постановка задачи динамического программирования, ее экономическая и геометрическая интерпретация.
7. Принцип оптимальности Беллмана.
8. Методы ветвей и границ.
9. Задача выбора оптимальной стратегии замены оборудования.
10. Дробно-линейное и параметрическое программирование.
11. Целочисленное программирование.
12. Задача оптимального распределения инвестиций.
13. Сетевая модель и ее основные элементы.
14. Методы факторного анализа.
15. Оптимизация сетевой модели.
16. Методы комплексной рейтинговой оценки.
17. Параметры сетевой модели и методы их расчета.
18. Обмен данных в компьютерных системах. Сетевые адаптеры, кабели и коммуникационные устройства компьютерных сетей.
19. Программное обеспечение компьютерных сетей.
20. Назначение и основные функции операционных сетей.
21. Диалоговый и пакетный режимы работы компьютерной системы.
22. Промышленные и персональные СУБД.
23. Антивирусное программное обеспечение. Защита информации в компьютерных сетях .
24. Интеллектуальные информационные системы.

3.4.3. Методические материалы

Обучающиеся дают письменные ответы на теоретические вопросы.

Порядок проведения зачета и экзамена соответствует ПВД-07 «О проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в ФГБОУ ВО «Верхневолжский ГАУ».